

Optimal reglering av deterministiska system:

- * Ingen skillnad mellan öppen och sluten styrning
- * Optimala regulatorn $S \rightarrow u$
Ingen dynamik

Exempel

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$x(0) = 1$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2) dt$$

$J_{\min} = 1$ fås för

$$u(t) = -e^{-t}$$

open loop (1)

$$u(t) = -x(t)$$

closed loop (2)

(1) $\Rightarrow$ stabilt system

(2) $\Rightarrow$ asymp. stab. system

Störningskänsligheten!

HUR BESKRIVA STÖRNINGAR ?

* Deterministiska störningar

Steg
Puls
Sinus

* Styckvis determin. störn



* Singulära stokastiska proc

$$x(t) = \sum a_i(t) \xi_i$$

stok var
kän. störning

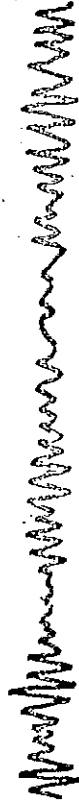
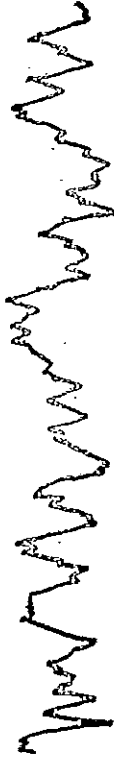
* Stokastiska processer



HISTORIK

R. BROWN 1827 Observation

A. EINSTEIN 1905 Analys



LANGEVIN, FOKKER, PLANCK, JOHNSON

DOOB, WIENER, CRAMER, LEVY

KHINCHINE, KOLMOGOROV,

LANIN BATTIN

KALMAN BUCY

RADARBRUS

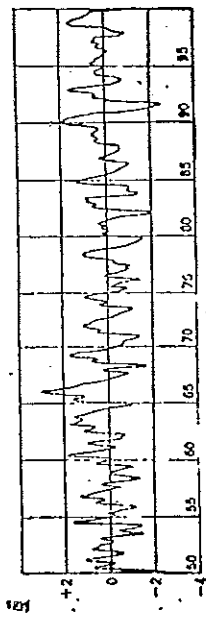
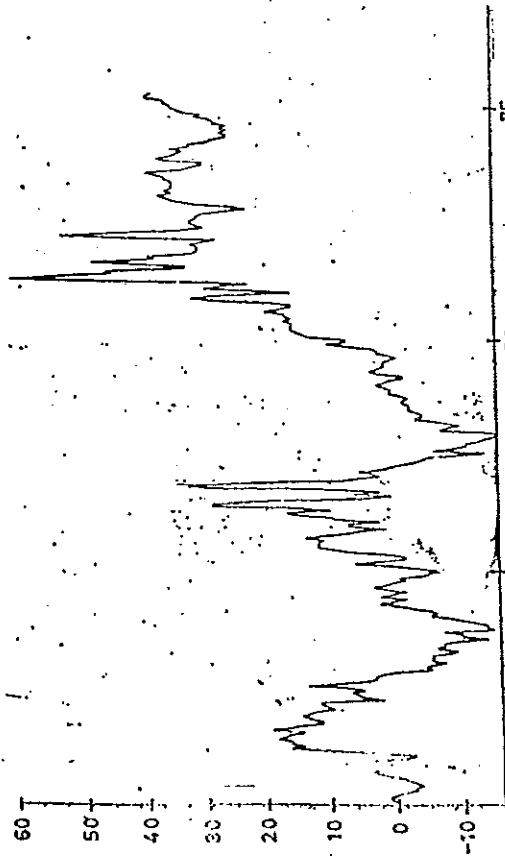


Fig. 4.8.—Traverse tracking data, outgoing radial errors.

GYRODRIFT

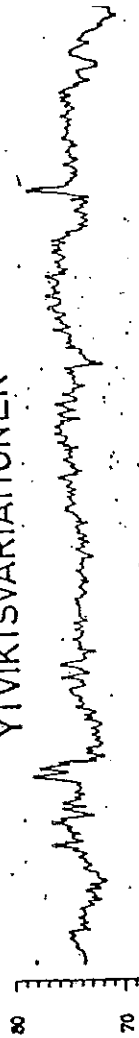


KÖLÄNGD



Fig. 1.3. Number of customers in system for realization of Table 1.2.

YTVIKTSVARIATIONER



STOKASTISKA PROCESSER

STOKASTISKA VARIABLER

DEF. AV STOK. PROCESSER

KARAKTÄRISERING

SPEKIELLA PROCESSER

SPEKTRALTÄTHET

VITT BRUS

ELEMENTA

En stokastisk variabel är en funktion definierad på ett sannolikhetsfält $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ w elementarhändelser Ω utfallsrum

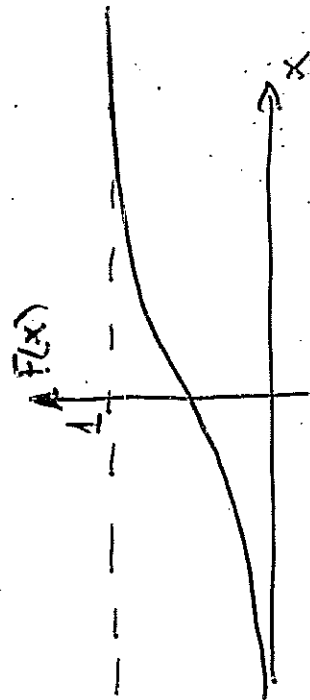
* Fördelningsfunktion

$$F(x) = P(x(w) \leq x)$$

• F ökande

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$



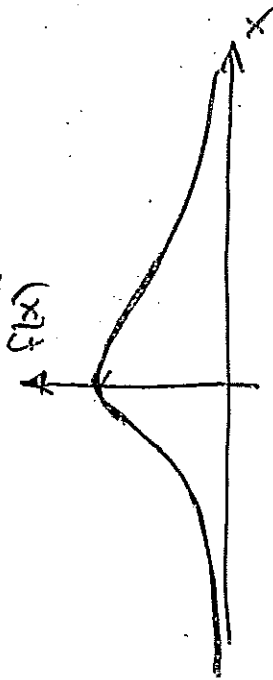
* Frekvensfunktion (Täthetsfunktion)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



* Normalfördelning $N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

* Medelvärde

$$\mu = \bar{x} = E x$$

* Varians $E(x-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$

FLERVARIABEL STOK. VAR.

$$F(\xi_1, \xi_2) = P(x_1(\omega) \leq \xi_1, x_2(\omega) \leq \xi_2)$$

Frekvensfunktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

"Sandhög"

x_1, x_2 oberoende om

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

Kovarians

$$r_{12} = \text{Cov}(x_1, x_2) = E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)]$$

Korrelation

$$S_{12} = \frac{r_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{(x-m)^T \Sigma^{-1} (x-m)}{2}}$$

STOKASTISK PROCESS

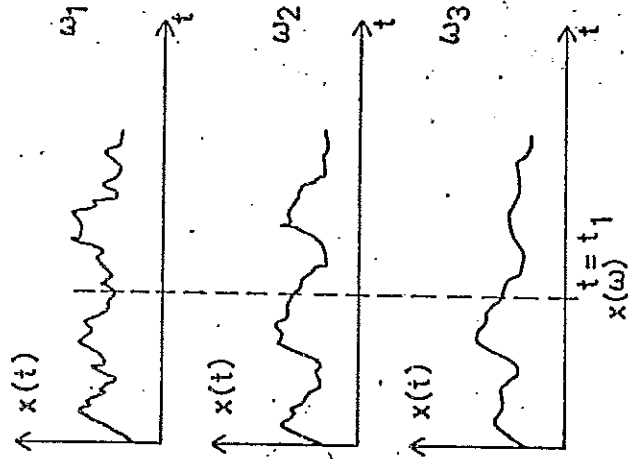
$$\{x(t, \omega) = \{x(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$$

Ω : UTFALLSRUM

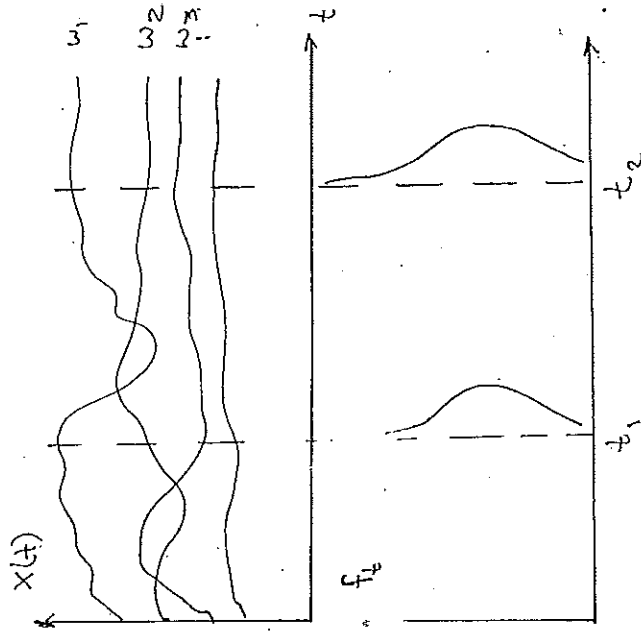
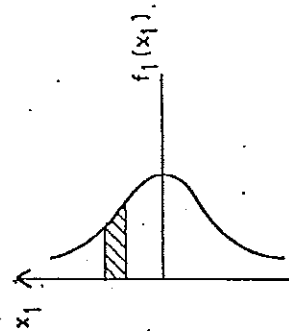
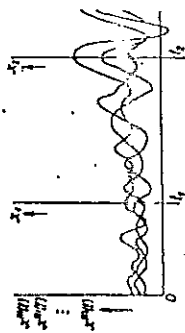
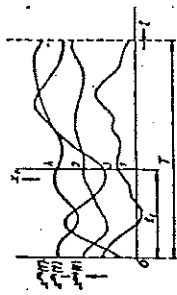
ω : ELEMENTARHÄNDELSE

$\omega \text{ fix} \Rightarrow x(t, \omega)$ EN VANLIG FUNKTION
ELLER REALISATION

$t \text{ fix} \Rightarrow x(t, \omega)$ STOKASTISK VARIABLE



HUR BESKRIVS EN STOKASTISK PROCESS



STATIONÄR PROCESS
SVAGT STATIONÄR PROCESS

$$m(t) = m$$

$$r(t_2, t_1) = r(t_2 - t_1)$$

FREKVENSFUNKTION

$$f_t(x)$$

MEDELVÄRDE

$$m(t_1) = E x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{t_1}(x) dx$$

KOVARIAN

$$r(t_1, t_2) = E [x(t_1) - m(t_1)] [x(t_2) - m(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1) (x_2 - m_2) f_{t_1 t_2}(x_1 x_2) dx_1 dx_2$$

ERGODISK PROCESS

$$E x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, w) dt$$

(nästan alla w)

EX

Ej ergodisk process

$$x(t) = x(0)$$

$$x(0) = \begin{cases} 1 & \text{slh } 0.5 \\ -1 & \text{slh } 0.5 \end{cases}$$

$$E[x] = 0$$

Tidsmedelv +1 eller -1

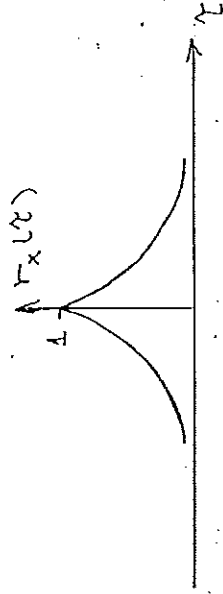
KOVA: ANSFÄKTION

$$r_x(s, t) = r_x(s - t) = E(x(s) - m_x(s))(x(t) - m_x(t))$$

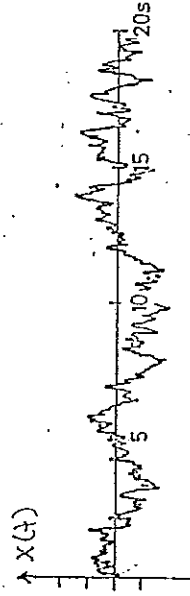
$$1) r_x(\tau) = r_x(-\tau)$$

$$2) r_x(0) \geq |r_x(\tau)|$$

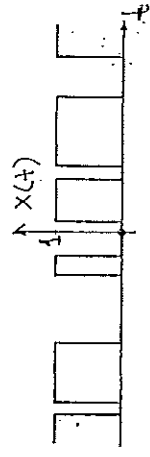
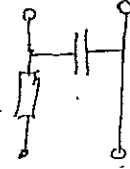
$$\text{Givet } r_x(\tau) = e^{-a|\tau|}$$



Hur ser $x(t)$ ut?



NORMAL



RANDOM TELEGRAPH WAVE

$r(\tau)$ - EGENSKAPER

$$(2-1) \neq (2)1 \neq$$

$$0 \leq (1-1) \neq 1 \neq 2 \neq 2 \neq$$

$$(0)1 \neq |(2)1| \neq$$

$$\Leftarrow 0=1 \neq 1 \neq (2)1 \neq$$

$$2A \neq 1 \neq 1 \neq (2)1$$

$$2 \neq 1 \neq 1 \neq (0)1 = (2)1 \neq$$

$$\Rightarrow r(\tau) \text{ periodisk}$$

SPEKTRALTÄTHET

KONT TID

$$\left\{ \begin{aligned} \phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} r(\tau) d\tau \\ r(\tau) &= (2)\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \phi(\omega) d\omega \end{aligned} \right.$$

$$\text{Var } x = r_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega$$

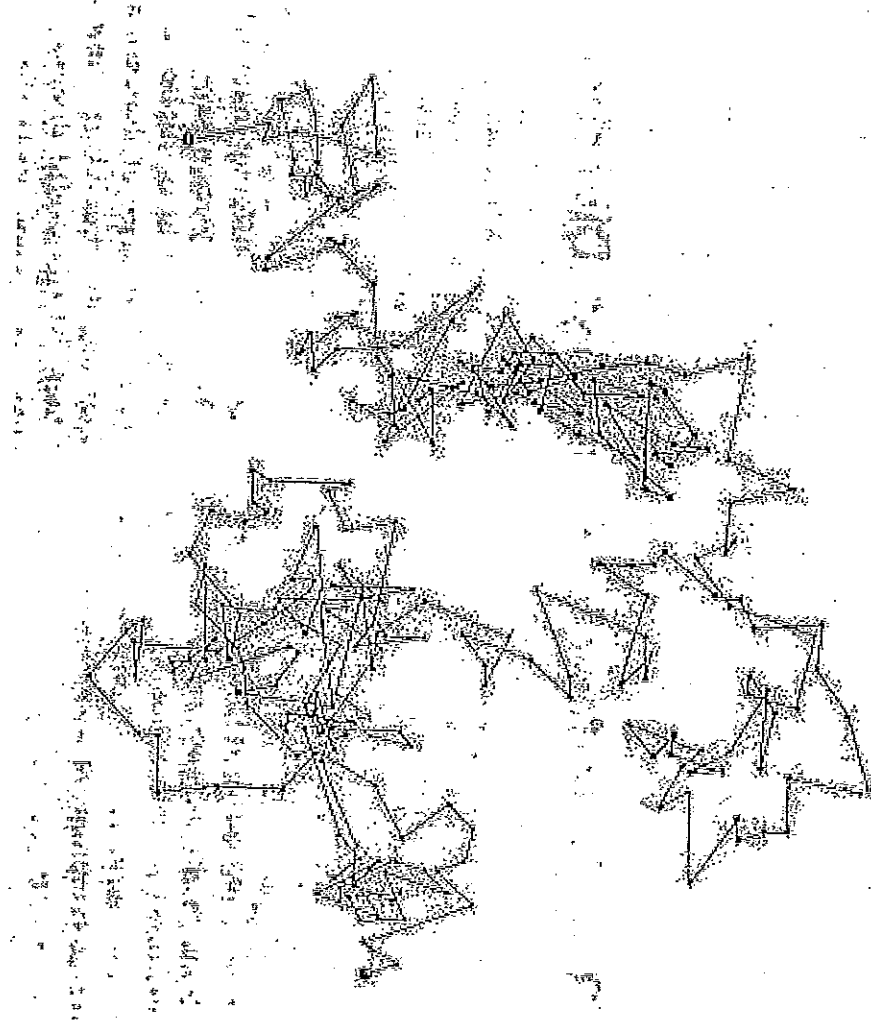
DISKRET TID

$$\left\{ \begin{aligned} \phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n) e^{-in\omega} \\ r(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} \phi(\omega) d\omega \end{aligned} \right.$$

SPECIELLA STOKASTISKA PROCESSER

- NORMAL PROCESS
- PROCESS AV ANDRA ORDNINGEN
- VITT BRUS
- WIENER PROCESS

Brownian motion



WIENER PROCESS

BROWNSK RÖRELSE (1827)

EINSTEIN (1905)

$x(t)$ - koordinat för partikel

Def

1. $x(0) = 0$
2. $x(t)$ normal
3. $E x(t) = 0 \quad \forall t > 0$
4. Oberoende stationära inkrement

Egenskaper

$$m(t) = E x(t) = 0$$

$$\text{var } x(t) = C \cdot t$$

$$r(s, t) = \text{cov}[x(s), x(t)] = C \min(s, t)$$

Samplefunktionen av WP

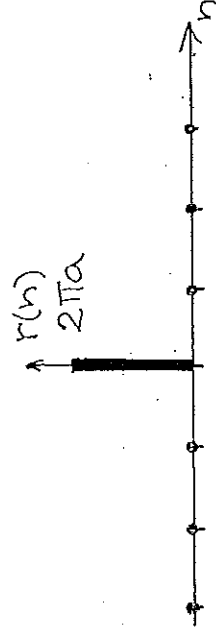
- kontinuerlig i slb 1
- derivatan # någonstans
- har oändlig längd

VITT BRUS

DISKRET TID

$$\phi(\omega) = a$$

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} \cdot a d\omega = \frac{2a}{n} \sin n\pi$$



KONTINUERLIG TID

$$\phi(\omega) = a$$

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} a d\omega$$

BANDBEGRÄNSAT VITT BRUS

$$\phi(\omega) = \begin{cases} a & |\omega| < \Omega \\ 0 & |\omega| \geq \Omega \end{cases}$$

NÄR $\Omega \rightarrow \infty$

$$r(\tau) = 2\pi a \delta(\tau)$$

VARFÖR VITT BRUS?

ANALYS AV STOK. PROC.

Hur definieras

- konvergens
- kontinuitet
- derivata
- integral

?

KONVERGENS

$$\{x_n(\omega), n=1, 2, \dots\}$$

* Slh 1

$$P\{\omega; x_n(\omega) \rightarrow x(\omega)\} = 1$$

utom för ω med slh måttet 0



* I sannolikhet

$$\uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega; |x_n(\omega) - x(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon$$

* I medelkvadratt mening

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|x_n - x|^2 = 0$$

Kontinuitet

$\{x(t)\}$ kont i medelkv. mening

om

$$\lim_{h \rightarrow 0} E [x(t+h) - x(t)]^2 = 0$$

$h \rightarrow 0$

Th $\{x(t)\}$ kont $\Leftrightarrow$ 1) $m(t)$ kont
(2.a ordn) 2) $r(t,t)$ kont

Deriverbarhet

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} - x'(t_0) \right\}^2 = 0$$

Th

$\{x_n\}$ svit av stok. var

$$E x_n^2 < \infty$$

$x_n \Rightarrow x$ i medelkvadrant

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E x_n = E \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = E x$$

Ex Wiener process

$\{x(t)\}$

$$E[x(t+h) - x(t)]^2 = h$$

$\Rightarrow \{x(t)\}$ kontinuerlig

$$E\left[\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right]^2 = \frac{1}{h}$$

$\Rightarrow \{x(t)\}$ ej der. bar

Kan visa formellt att

Derivatans av en Wiener process är vitt brus

SAMMANFATTNING

- Måste ha en känsla för vad en stokastisk process är
- Medelvärde, kovariansfkn
- Normal fördelning
- Tidsdiskret lätt
- Tidskontinuerligt svårt
- Kommer att använda normalfördelat brus och medelkvadrat mening